Definição de acontecimentos certos na extração de berlindes de um saco

José António Fernandes
María Magdalena Gea Serrano
Paulo Ferreira Correia

RESUMO

Neste artigo investiga-se o conhecimento de futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade no estabelecimento de três acontecimentos certos definidos num processo de extração de berlindes de um saco, de modo a garantir a obtenção de um berlinde de uma cor, dois berlindes de cores diferentes e três berlindes de cores diferentes. Participaram no estudo 63 alunos do curso de Licenciatura em Educação Básica, os quais responderem, por escrito, aos três itens da tarefa sobre acontecimentos certos. Em termos de resultados, verificou-se que o desempenho dos alunos diminuiu sistematicamente com a garantia de extrair pelo menos um berlinde de uma cor, dois berlindes de duas cores e um berlinde de cada uma das três cores.

Palavras-chave: Acontecimentos Certos; Extração sem Reposição; Futuros Educadores e Professores dos Primeiros anos.

Defining certain events in the process of drawing balls from a bag

ABSTRACT

In this paper we investigate the knowledge of future kindergarten educators and teachers of primary education in the establishment of three certain events defined in a marble drawing process of a bag, in order to ensure getting a colored marble, two different colored marbles, and three different colored marbles. In the study, 63 students of Bachelor in Elementary Education participated, which answered to the three items of the task on certain events in a written form. In terms of results, it was found that the performance of students decreased systematically with the guarantee of at least drawing one color marble, two different color marbles and three different color marbles.

Keywords: Certain Events; Drawing without Replacement; Future Kindergarten Educators and Primary Teachers.

INTRODUÇÃO

O ensino da estocástica, incluindo a estatística e as probabilidades, tem assumido ultimamente uma maior visibilidade nos programas escolares de matemática de

José António Fernandes é docente da Universidade do Minho, Departamento de Estudos Integrados de Literacia, Didática e Supervisão, Portugal. E-mail: jfernandes@ie.uminho.pt
María Magdalena Gea Serrano é docente da Universidade de Granada, Departamento de Didactica de la Matemática, Espanha. E-mail: mmgea@ugr.es
Paulo Ferreira Correia é professor de Matemática na Escola Secundária de Barcelos, Portugal.
E-mail: ferreiracorreiapaulo@gmail.com
Recebido para publicação em 7/11/2015. Aceito, após revisão, em 4/05/2016.

muitos países, entre os quais se encontra também o caso português (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA, 2013; 2014).

Este aprofundamento do estudo da estocástica na escola, reflexo da importância crescente destas temáticas para a vida das pessoas (a nível pessoal, profissional e social), tem-se repercutido mais no Ensino Básico[1]. É exemplo disso a introdução do tema Organização e Tratamento de Dados no 1.º ciclo do Ensino Básico do programa escolar anterior (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2007), passando a temática a fazer parte de estudo desde o 1.º ano de escolaridade até ao 12.º ano.

Para além da importância atribuída a esta temática, a sua introdução logo nos primeiros anos de escolaridade também se justifica pelo facto de que o seu estudo mais tardio leva à consolidação de uma visão determinista do mundo, a qual poderá estar na origem de muitas ideias erradas (FISCHBEIN, 1975). Assim, Batanero (2013) defende que desde o início da sua escolarização os alunos devem ser confrontados com situações probabilísticas, o que contribuirá, certamente, para a não consolidação dessas ideias intuitivas erradas.

Ao nível do Ensino Básico, atualmente, o tópico de Probabilidades aborda-se no 9.º ano de escolaridade e inclui os conteúdos (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2013): experiências deterministas e aleatórias; universo de resultados de uma experiência aleatória (espaço amostral); diferentes tipos de acontecimentos (elementar, composto, certo, possível e impossível) e relações entre eles (disjuntos ou incompatíveis e complementares); definição clássica de probabilidade e definição frequencista de probabilidade; e uso de tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore na resolução de problemas. O estudo das probabilidades, centrado no 9.º ano, contrasta com o programa de 2007 (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO, 2007), onde esse estudo acontecia ao longo dos três ciclos. Concretamente, nos dois últimos anos do 1.º ciclo exploravam-se situações aleatórias envolvendo o conceito de acaso e a utilização do vocabulário próprio para as descrever (acontecimentos certo, possível, impossível, provável e improvável), no 2.º ciclo realizavam-se experiências para exemplificar a regularidade a longo termo, consolidando, simultaneamente, o vocabulário básico relativo a situações aleatórias e no 9.º ano coincidia o que está prescrito no atual programa.

A estrutura do novo programa curricular limita muito o ensino e aprendizagem do tema Probabilidades pois, por um lado, se dedica um tempo muito limitado ao trabalho em aula (estimamos que entre uns 10 e 15 tempos dos 22 destinados ao domínio matemático Organização e Tratamento de Dados do 9º ano) e, por outro, o aluno não tem uma formação prévia que lhe facilite assimilar os novos conteúdos previstos. Neste novo programa refere-se ainda que o trabalho do professor deve contribuir, através do seu ensino, para estruturar o pensamento do aluno em ordem a capacitá-lo para analisar o mundo natural e interpretar a sociedade (MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA, 2013). Assim, a formação do professor dos primeiros anos de escolaridade é determinante e crucial para

[1] Em Portugal, o Ensino Básico desenvolve-se ao longo dos primeiros nove anos de escolaridade e estrutura-se em três ciclos: 1.º ciclo – do 1.º ano ao 4.º ano; 2.º ciclo – 5.º e 6.º anos e 3.º ciclo – do 7.º ano ao 9.º ano.

garantir una adequada formação do aluno. Nesse sentido, nesta investigação estuda-se o desempenho de futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade no estabelecimento de vários acontecimentos certos definidos num processo de extração (sem reposição) de berlindes de um saco.

INVESTIGAÇÃO PRÉVIA

A probabilidade é um conceito multifacetado que ao longo da História tem assumido diferentes significados. Borovcnik, Bentz e Kapadia (1991) distinguem quatro conceitos de probabilidade: (1) conceito clássico; (2) conceito frequencista ou empírico; (3) conceito subjetivista e (4) conceito estrutural. No conceito clássico, atribuem-se probabilidades a acontecimentos com base na definição clássica de probabilidade, devida a Laplace; no conceito frequencista ou empírico, a probabilidade de um acontecimento resulta da frequência relativa observada em experiências repetidas; na perspetiva subjetivista, a atribuição de probabilidades baseia-se na assunção básica de que os sujeitos têm suas próprias probabilidades, que resultam de um padrão implícito de preferência entre decisões; e o conceito estrutural é definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos daqueles axiomas. Como indicam Batanero e Díaz (2007), os axiomas que definem este conceito de probabilidade, propostos por Kolmogorov (1903-1987), são aplicáveis aos outros significados de probabilidade (clássico, frequencista e subjetivo).

A investigação sobre o desempenho dos alunos em tarefas de cálculo de probabilidades adverte-nos de dificuldades e enviesamentos que geralmente provêm da compreensão das condições que regem a experiência realizada e do conjunto de possíveis resultados ligados à mesma. Seja qual for a experiência, o aluno deve ser capaz de compreender os conceitos de acontecimento *impossível* (não ocorre nunca e a sua probabilidade é 0), *certo* (ocorre sempre e a sua probabilidade é 1) e *possível* (mas não certo) ou *provável* (quando ocorre algumas vezes mas não sempre e a sua probabilidade varia entre 0 e 1, exclusive). Neste trabalho interessamo-nos pelo conceito de acontecimento certo, sobre o qual a investigação em Didática e Psicologia nos adverte de dificuldades do aluno que se devem, em grande parte, à análise exaustiva que se tem de fazer destes acontecimentos em comparação com os possíveis (mas não certos) (FERNANDES, 2001).

Fischbein, Nello e Marino (1991) observaram, relativamente a alunos do 4.º e 5.º ano (9-11 anos) e do 6.º, 7º. e 8.º ano (11-14 anos), que a maioria deles classificou acontecimentos (nos contextos do lançamento de um dado e de girar uma tômbola de jogo com números de 1 a 90) em certos, possíveis e impossíveis, verificando-se uma ligeira melhoria das respostas dos alunos com a idade em todos os itens e com o estudo prévio de probabilidades na maioria dos itens, neste último caso um tanto irregular. De entre os vários tipos de acontecimentos, os alunos revelaram mais dificuldades na categoria dos acontecimentos certos e na formulação de acontecimentos relativamente à sua classificação. Tal como foi referido antes, a maior dificuldade sentida pelos alunos nos acontecimentos certos pode explicar-se por estes se terem de verificar em todos os casos, implicando uma análise exaustiva não necessária no caso dos acontecimentos possíveis (mas não certos).

Em Portugal, Fernandes (1999) verificou também que a maioria dos alunos do 8.º e 11.º ano (12-16 anos) foram capazes de classificar acontecimentos (no contexto de extração de berlindes de um saco) em certos, possíveis e impossíveis, observando-se um aumento sistemático das respostas corretas com o ano escolar e com o desempenho em matemática e verificaram-se mais dificuldades em identificar acontecimentos certos e/ou que envolviam conectivos lógicos. Ainda neste estudo, constatou-se que as dificuldades de alunos do 9.º ano, sem ensino de probabilidades, aumentaram consideravelmente quando lhes foi pedido para distinguirem acontecimentos quase certos (com uma probabilidade próxima de 1) de acontecimentos certos e acontecimentos quase impossíveis (com uma probabilidade próxima de 0) de acontecimentos impossíveis.

Fernandes e Barros (2005), num estudo envolvendo alunos futuros professores do curso de Professores do Ensino Básico, variante de Matemática e Ciências da Natureza, concluíram que a maioria dos alunos foi capaz de classificar acontecimentos (no contexto de girar uma tômbola de jogo com números de 1 a 90) em certos, possíveis e impossíveis (entre 86,3% e 97,3% de respostas corretas) e de formular acontecimentos dos diversos tipos (entre 78,4% e 97,3% de respostas corretas). Também estes futuros professores do Ensino Básico demonstraram mais dificuldades em formular do que em classificar acontecimentos e em classificar acontecimentos certos do que outros tipos de acontecimentos.

No estudo de Fischbein e Gazit (1984), envolvendo alunos do 5.º, 6.º e 7.º ano (10-13 anos) com ensino prévio em probabilidades, para além de uma tarefa de formulação de acontecimentos certos, possíveis e impossíveis (num contexto escolhido pelos alunos), em que a maioria dos alunos mostrou ser capaz de formular os diferentes tipos de acontecimentos e em que aumentou a percentagem de respostas corretas com o ano de escolaridade, os autores propuseram a seguinte tarefa: "Numa caixa há 4 berlindes vermelhos, 3 verdes e 2 brancos. Quantos berlindes se tem de extrair [sem reposição] para se estar seguro de obter pelo menos um berlinde cada cor?" (FISCHBEIN; GAZIT, 1984, p.5).

Nesta tarefa pretende-se estabelecer o número de berlindes a extrair da caixa (sem reposição) para garantir que se obtém um berlinde da cada cor, ou seja, garantir que o acontecimento seja certo. Comparativamente com as tarefas anteriormente revistas, podemos afirmar que esta tarefa apresenta um maior grau de desafio para os alunos pois o critério habitual de classificação de acontecimentos – todos os elementos do espaço amostral são casos favoráveis ao acontecimento – não é aqui aplicável. Assim, quando comparadas com as tarefas antes referidas, o maior grau de desafio desta tarefa explica as percentagens muito inferiores de respostas corretas obtidas (14,1% no 5.º ano; 31,5% no 6.º ano e 53,8% no 7.º ano), aumentando claramente com o ano escolar.

Também no estudo de Fernandes e Barros (2005), já antes referido, foi aplicada aos alunos futuros professores do Ensino Básico uma tarefa muito semelhante à de

Fischbein e Gazit (1984), envolvendo agora a extração (sem reposição) de berlindes de um saco, com 5 berlindes vermelhos, 2 verdes e 4 brancos, até se garantir a extração de um berlinde de cada cor. Estes alunos, com ensino de probabilidades, pelo menos na escola básica e no ensino superior, revelaram muitas dificuldades na tarefa (24,4% de respostas corretas), mesmo mais do que os alunos do 6.º e 7.º ano do estudo de Fischbein e Gazit (1984), tendo justificado as suas respostas com cálculo de probabilidades (27,0%), cálculo combinatório (16,2%), extração dos berlindes menos numerosos antes dos mais numerosos (2,7%) e violaram o procedimento prescrito (2,7%). Verificou-se, ainda, que 32,5% dos alunos não avançaram qualquer justificação.

Mais recentemente, Ortiz e Mohamend (2014) propuseram a alunos, futuros professores da educação primária, com ensino de probabilidades ao nível do ensino secundário, uma tarefa quase idêntica à de Fischbein e Gazit (1984), envolvendo a extração (sem reposição) de berlindes de um caixa contendo 4 berlindes vermelhos, 3 verdes e 2 brancos, até à obtenção segura de um berlinde de cada uma das cores. Comparativamente com o estudo de Fernandes e Barros (2005), envolvendo também futuros professores do Ensino Básico, neste estudo os alunos selecionaram mais frequentemente a resposta correta (46,3%), extrair 8 berlindes da caixa.

Adicionalmente, reportando-se ao estudo de Cañizares (1997), envolvendo alunos com 10-14 anos, Ortiz e Mohamend (2014) destacam a baixa percentagem de respostas corretas (13,3%) obtidas por estes alunos. Comparando os dois estudos, salientam-se, em termos de percentagens, as respostas erradas: extrair 3 berlindes (9,5% dos futuros professores e 33,6% dos alunos); extrair 6 berlindes (8,5% dos futuros professores e 25,8% dos alunos) e extrair 9 berlindes (8,1% dos futuros professores e 12,6% dos alunos).

O nosso interesse neste trabalho é complementar as investigações anteriores, aprofundando o conhecimento sobre o desempenho dos futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade sobre o conceito de acontecimento certo. Mais especificamente, estudar a variação do desempenho dos alunos consoante se trate de garantir a extração de pelo menos um berlinde de uma cor, dois berlindes de duas e três berlindes de três cores.

METODOLOGIA

Neste estudo investiga-se a realização por futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade de uma tarefa sobre a definição de acontecimentos certos num processo de extração de berlindes de um saco. Participaram no estudo 63 alunos que se encontravam a frequentar a unidade curricular de Números e Probabilidades, que se integrava no 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica de uma universidade do norte de Portugal, e tinham já estudado os conteúdos de probabilidades. A conclusão da Licenciatura dá acesso a cursos de mestrado em Educação Pré-Escolar e/ou Ensino dos primeiros anos de escolaridade (1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico).

À entrada na universidade, a formação matemática dos alunos era muito variada, tendo estudado pela última vez matemática em cursos muito distintos, de que se salientam: Cursos Científico-Humanísticos de Ciências e Tecnologias e de Ciências Socioeconómicas (41,2%); Cursos Científico-Humanístico de Ciências Sociais e Humanas e Tecnológico de Ordenamento do Território e Ambiente (33,3%); e Matemática do 9.º ano do Ensino Básico (15,7%). Em geral, os alunos percecionavam dificuldades na aprendizagem das disciplinas do âmbito da matemática na universidade, afirmando a maioria ter muita dificuldade (27,5%) ou ter dificuldade (43,1%), enquanto muito menos afirmaram ter pouca dificuldade (29,4%).

A realização da tarefa, que consta da Figura 1, integrava-se na avaliação formal dos alunos na unidade curricular de Números e Probabilidades.

FIGURA 1 – Enunciado da tarefa proposta aos alunos.

Num saco há 4 berlindes vermelhos, 3 verdes e 2 brancos.

a) Quantos berlindes se devem retirar do saco (sem reposição) para termos a certeza de obter pelo menos um berlinde de cor verde? Por quê?

b) Quantos berlindes se devem retirar do saco (sem reposição) para termos a certeza de obter pelo menos um berlinde de cor vermelha e outro de cor verde? Por quê?

c) Quantos berlindes se devem retirar do saco (sem reposição) para termos a certeza de obter pelo menos um berlinde de cada cor? Por quê?

Fonte: dados da pesquisa.

A resolução da tarefa, para além de envolver o conceito de acontecimento certo, implica também a mobilização de outros conteúdos com ele relacionados, designadamente as noções de espaço amostral, casos favoráveis e possíveis, probabilidade e métodos de contagem. Na presente tarefa, a consideração de três acontecimentos certos em vez de um, como acontecia nas tarefas dos estudos revistos na secção anterior, permitirá aprofundar a compreensão dos alunos e estudar inconsistências nas respostas dos alunos ao longo dos três itens considerados. Uma situação de inconsistência foi constada por Fernandes (1990) e Konold, Pollatsek, Well, Lohmeier e Lipson (1993), em situações de comparação de probabilidades, quando os alunos afirmavam que todos os acontecimentos eram equiprováveis e seguidamente elegiam um como sendo menos provável ou elegiam um como sendo mais provável e seguidamente afirmavam que todos eram equiprováveis.

Finalmente, em termos de análise de dados, nos três itens estudaram-se as respostas e as justificações dos alunos para a seleção dessas respostas. As justificações foram agrupadas em categorias definidas *a posteriori* com base nas ideias subjacentes às justificações dos alunos e na literatura revista e são especificadas na próxima secção, apresentando-se também exemplos de respostas e justificações para clarificar cada um dos casos.

RESULTADOS

A resolução da questão proposta aos alunos, em qualquer dos três itens, não pode ser efetuada através de uma fórmula, tendo de ser analisadas diferentes situações para verificar se conduzem ou não a acontecimentos certos. O aluno necessita de elaborar um plano para responder aos diferentes itens, que pode ser mais laborioso, quer dizer, (1) visualizar todas as possíveis extrações de berlindes do saco socorrendo-se de um diagrama de árvore ou qualquer outro esquema (não adotado por nenhum dos estudantes); ou pode ser mais fácil e eficaz, quer dizer, (2) analisar uma situação limite com um número de berlindes determinado. Neste último caso, podemos distinguir duas estratégias:

E1. Esta estratégia consiste em considerar os berlindes da cor que estão em maior número, começando por aqueles que não são favoráveis, e continuando com os que são favoráveis ao acontecimento (se for o caso). Por exemplo, no caso do item a) temos de extrair sete berlindes para obter de certeza um berlinde verde, número que corresponde à soma do número de berlindes de cor vermelha, branca e mais um berlinde, que garante a certeza de "obter pelo menos um berlinde de cor verde".

E2. Em alternativa, podemos analisar o número de berlindes que ficam no saco depois da extração. Ainda no caso do item a), ao extrairmos sete berlindes, ficam no saco dois berlindes, os quais podem ser ambos vermelhos, verdes ou brancos, ou de cores diferentes. Em qualquer caso, terá saído pelo menos um berlinde verde, que garante a certeza de "obter pelo menos um berlinde de cor verde". Já no caso de termos extraído seis berlindes (ou menos), restarão no saco três berlindes (ou mais), os quais poderão ser todos verdes, não garantindo, assim, a obtenção do berlinde verde.

Na Tabela 1 apresenta-se, em cada item, o número de berlindes que os alunos indicaram ser necessário extrair para garantir a realização certa do respetivo acontecimento. Pela tabela podemos verificar que o número correto de berlindes a extrair do saco para a realização certa do acontecimento ─ retirar 7 berlindes nos itens a) e b) e 8 berlindes no item c) ─ é indicado por mais alunos no item a), 84,1%, diminui no item b), 58,7%, e mais ainda no item c), 38,1%.

TABELA 1 – Frequência (em %) de alunos segundo o n.º de berlindes extraídos em cada um dos três itens.

Nº de berlindes extraídos	Itens a)	b)	c)
2	–	3 (4,8)	–
3	4 (6,3)	6 (9,5)	10 (15,9)
4	1 (1,6)	–	–
5	2 (3,2)	1 (1,6)	1 (1,6)
6	1 (1,6)	11 (17,4)	17 (27,0)
7	53 (84,1)*	37 (58,7)*	4 (6,3)
8	–	2 (3,2)	24 (38,1)*
9	–	–	5 (7,9)
NR	2 (3,2)	3 (4,8)	2 (3,2)

*Resposta correta; NR – Não Resposta.

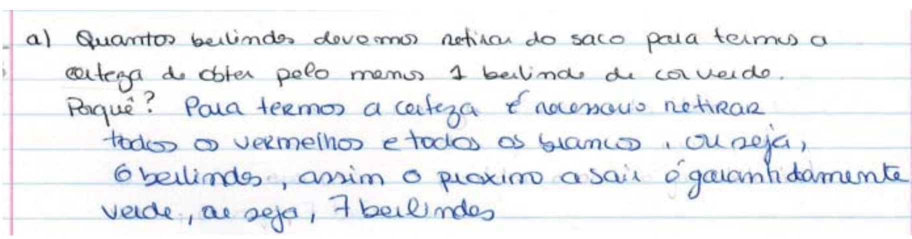
Fonte: dados da pesquisa.

Seguidamente analisam-se as justificações apresentadas pelos alunos para as suas respostas em cada um dos itens.

Item a)

Extrair sete berlindes, que é a resposta correta, foi a mais referida pelos alunos, tendo quase todos justificado a sua resposta a partir do número total de berlindes vermelhos e brancos (estratégia E1).

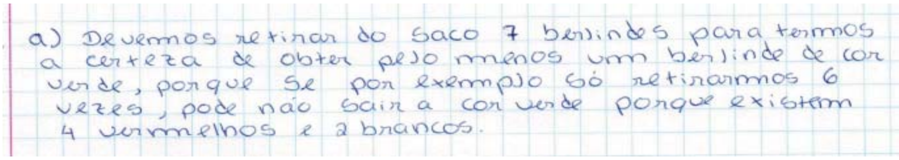
FIGURA 2 – Justificação do aluno A2 no item a).


a) Quantos berlindes devemos retirar do saco para termos a certeza de obter pelo menos 1 berlinde de cor verde.
Porquê? Para teemos a certeza é necessário retirar todos os vermelhos e todos os brancos, ou seja, 6 berlindes, assim o próximo a sair é garantidamente verde, ou seja, 7 berlindes

Fonte: dados da pesquisa.

Já o aluno A61 apresenta um contraexemplo para justificar a sua resposta, observando que a extração de 6 berlindes não garante a extração segura do berlinde verde (Figura 3). Este aluno também fez uso da estratégia (E1).

FIGURA 3 – Justificação do aluno A61 no item a).

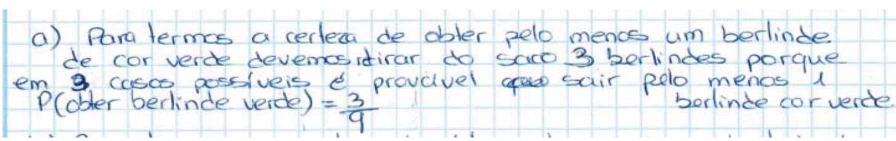

a) Devemos retirar do saco 7 berlindes para termos a certeza de obter pelo menos um berlinde de cor verde, porque se por exemplo só retirarmos 6 vezes, pode não sair a cor verde porque existem 4 vermelhos e 2 brancos.

Fonte: dados da pesquisa.

A resposta extrair três berlindes centra-se no número de berlindes verdes. Como se mostra na Figura 4, o aluno afirma que com três extrações se assegura a obtenção de um berlinde verde. Para tal, considera que a probabilidade de obter três berlindes verdes coincide com a soma das suas probabilidades simples, isto é, se designarmos por A_i o acontecimento "sair berlinde verde na extração i", o aluno aplica incorretamente a seguinte propriedade da probabilidade, que só é válida para acontecimentos disjuntos:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{3}{9} + \frac{3}{9} + \frac{3}{9} = 1 \cdot$$

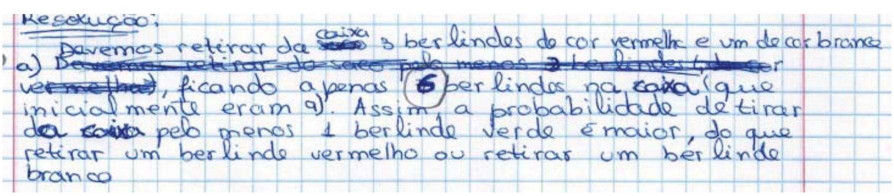
FIGURA 4 – Justificação do aluno A58 no item a).


a) Para termos a certeza de obter pelo menos um berlinde de cor verde devemos retirar do saco 3 berlindes porque em 3 casos possíveis é provável ~~que~~ sair pelo menos 1 berlinde cor verde.
P(obter berlinde verde) = 3/9

Fonte: dados da pesquisa.

Nas restantes respostas, extrair quatro, cinco ou seis berlindes, os alunos centram-se na extração de berlindes vermelhos e brancos de modo a maximizar a probabilidade de obter um berlinde verde. Por exemplo, o aluno A42 refere-se a retirar três berlindes vermelhos e um branco (Figura 5).

FIGURA 5 – Justificação do aluno A42 no item a).

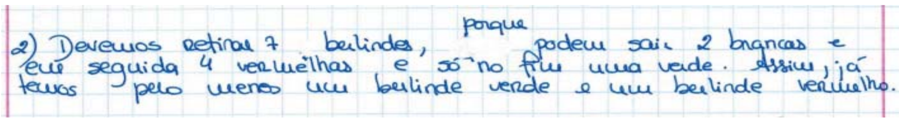

Resolução:
Devemos retirar da caixa ~~saco~~ 3 berlindes de cor vermelha e um de cor branca
a) ~~Devemos retirar do saco pelo menos 3 berlindes de cor vermelha~~, ficando apenas 6 berlindes na ~~caixa~~ caixa (que inicialmente eram 9). Assim a probabilidade de tirar da caixa pelo menos 1 berlinde verde é maior, do que retirar um berlinde vermelho ou retirar um berlinde branco

Fonte: dados da pesquisa.

Item b)

Extrair sete berlindes, que é a resposta correta, foi a mais referida pelos alunos (59%). A maioria destes alunos (38,1% do total de alunos) utilizou a estratégia (E1) e centrou-se no número total de berlindes brancos e vermelhos, seis, garantindo-se na sétima extração a obtenção dos berlindes vermelho e verde (Figura 6).

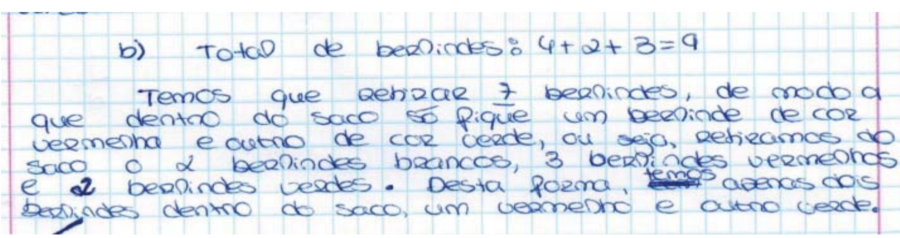
FIGURA 6 – Justificação do aluno A55 no item b).


2) Devemos retirar 7 berlindes, porque podem sair 2 brancas e em seguida 4 vermelhas e só no fim uma verde. Assim, já temos pelo menos um berlinde verde e um berlinde vermelho.

Fonte: dados da pesquisa.

Outros alunos (20,6% do total de alunos) utilizaram a estratégia (E2) e, para obterem a resposta correta do item, fixaram os três berlindes verdes e asseguraram que na sétima extração tinham um berlinde verde e outro vermelho. Outros utilizaram incorretamente esta estratégia pois consideraram o total relativo a três berlindes vermelhos, dois verdes e dois brancos de modo a restarem no saco um berlinde vermelho e outro verde, como se mostra na Figura 7.

FIGURA 7 – Justificação do aluno A8 no item b).

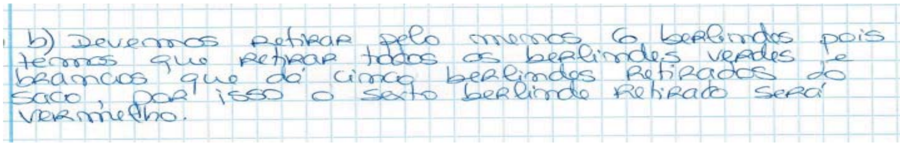

b) Total de berlindes: 4+2+3=9

Temos que retirar 7 berlindes, de modo a que dentro do saco só fique um berlinde de cor vermelha e outro de cor verde, ou seja, retiramos do saco o 2 berlindes brancos, 3 berlindes vermelhos e 2 berlindes verdes. Desta forma, temos apenas dois berlindes dentro do saco, um vermelho e outro verde.

Fonte: dados da pesquisa.

Extrair seis berlindes foi também uma resposta indicada por um número considerável de alunos, os quais recorreram à estratégia (E1) mas não fixaram corretamente o maior número de berlindes desfavoráveis (berlindes vermelhos), antes centraram-se no total de berlindes brancos e verdes (cinco), obtendo-se na sexta extração um berlinde vermelho (Figura 8).

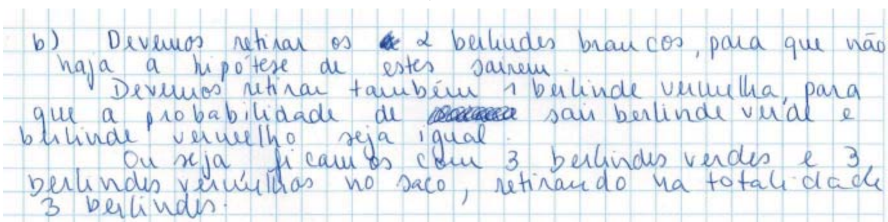
FIGURA 8 – Justificação do aluno A43 no item b).


b) Devemos retirar pelo menos 6 berlindes pois temos que retirar todos os berlindes verdes e brancos que dá cinco berlindes retirados do saco, por isso o sexto berlinde retirado será vermelho.

Fonte: dados da pesquisa.

A resposta extrair dois ou três berlindes baseou-se na extração dos dois berlindes brancos e um vermelho, o que conduz à igual probabilidade de obter um berlinde vermelho e outro verde (Figura 9), ou na extração dos dois berlindes brancos, o que conduz à maior probabilidade de obter um berlinde vermelho do que um verde.

FIGURA 9 – Justificação do aluno A14 no item b).


b) Devemos retirar os 2 berlindes brancos, para que não haja a hipótese de estes saírem.
Devemos retirar também 1 berlinde vermelho, para que a probabilidade de sair berlinde verde e berlinde vermelho seja igual.
Ou seja ficamos com 3 berlindes verdes e 3 berlindes vermelhos no saco, retirando na totalidade 3 berlindes.

Fonte: dados da pesquisa.

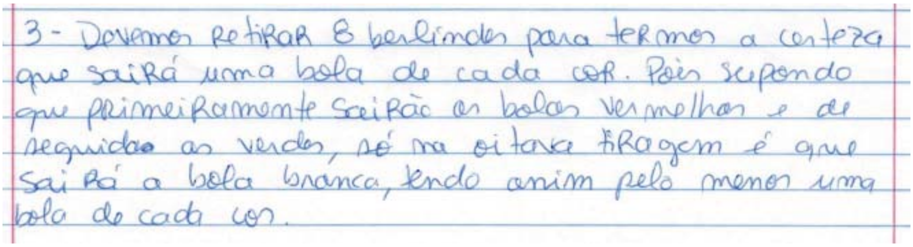
Dos dois alunos cuja resposta é extrair oito berlindes, nas justificações, um deles repete parte do enunciado e outro considerou o total relativo a três berlindes vermelhos, dois verdes e dois brancos, obtendo-se os berlindes pretendidos na oitava extração.

Finalmente, o aluno da resposta extrair cinco berlindes apresentou uma justificação ininteligível.

Item c)

Também neste item a resposta correta, extrair oito berlindes, foi a selecionada por mais alunos. Destes alunos, quase todos adotaram a estratégia (E1) e consideraram o número total de berlindes vermelhos e verdes, que são sete, garantindo-se a extração do berlinde branco na oitava extração (Figura 10).

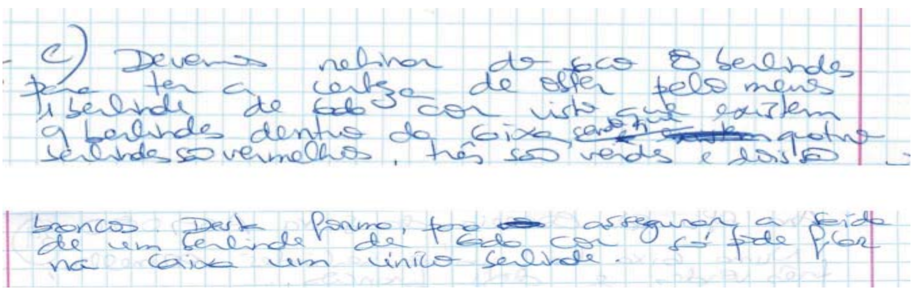
FIGURA 10 – Justificação do aluno A56 no item c).


3- Devemos retirar 8 berlindes para termos a certeza que sairá uma bola de cada cor. Pois supondo que primeiramente sairão as bolas vermelhas e de seguida as verdes, só na oitava tiragem é que sairá a bola branca, tendo assim pelo menos uma bola de cada cor.

Fonte: dados da pesquisa.

Ainda neste item, um aluno centrou-se na composição final do saco (estratégia E2) (Figura 11) e dois não apresentaram qualquer justificação.

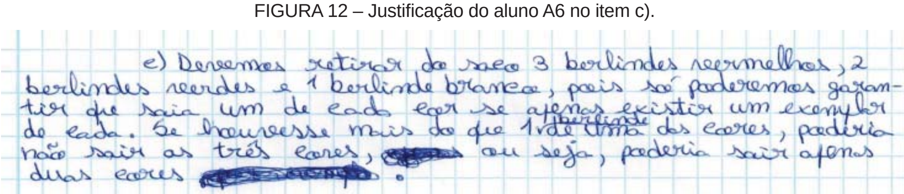
FIGURA 11 – Justificação do aluno A39 no item c).


c) Devemos retirar do saco 8 berlindes para ter a certeza de obter pelo menos 1 berlinde de cada cor visto que existem 9 berlindes dentro da caixa, quatro berlindes são vermelhos, três são verdes e dois são brancos. Desta forma, para assegurar a saída de um berlinde de cada cor só pode ficar na caixa um único berlinde.

Fonte: dados da pesquisa.

No número de alunos, seguiu-se a resposta extrair seis berlindes. Neste caso, os alunos centraram-se em três berlindes vermelhos e dois verdes, obtendo-se o berlinde branco na sexta extração. Destes, alguns alunos aludiram ainda ao facto de no saco ficar um berlinde de cada cor (Figura 12).

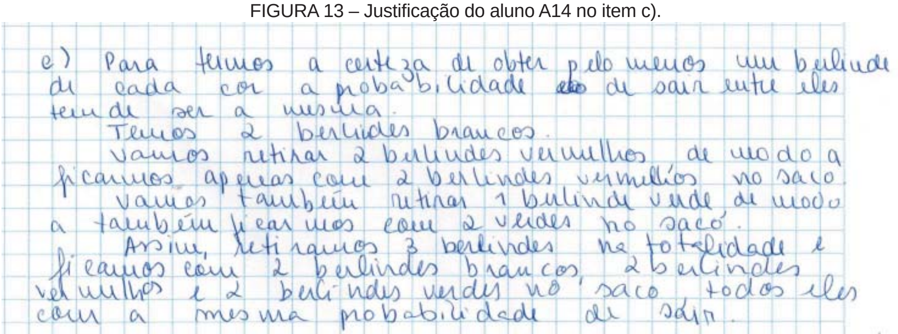
FIGURA 12 – Justificação do aluno A6 no item c).


c) Devemos retirar do saco 3 berlindes vermelhos, 2 berlindes verdes e 1 berlinde branco, pois só poderemos garantir que saia um de cada cor se apenas existir um exemplar de cada. Se houvesse mais do que 1 berlinde de uma das cores, poderia não sair as três cores, ou seja, poderia sair apenas duas cores.

Fonte: dados da pesquisa.

A resposta extrair três berlindes baseou-se na estratégia (E2), fixando de maneira equivocada a mesma quantidade de berlindes de cada cor (duas) no saco. De este modo, com a extração de dois berlindes vermelhos e um verde, o aluno assegura erradamente que é igual a probabilidade de extrair um berlinde cada cor (Figura 13).

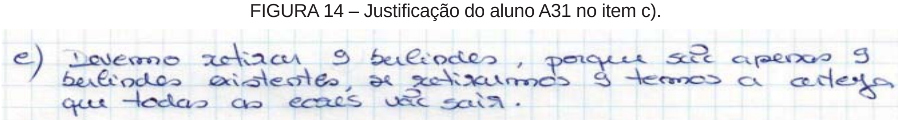
FIGURA 13 – Justificação do aluno A14 no item c).


c) Para termos a certeza de obter pelo menos um berlinde de cada cor a probabilidade de sair entre eles tem de ser a mesma.
Temos 2 berlindes brancos.
Vamos retirar 2 berlindes vermelhos de modo a ficarmos apenas com 2 berlindes vermelhos no saco.
Vamos também retirar 1 berlinde verde de modo a também ficarmos com 2 verdes no saco.
Assim, retiramos 3 berlindes na totalidade e ficamos com 2 berlindes brancos, 2 berlindes vermelhos e 2 berlindes verdes no saco todos eles com a mesma probabilidade de sair.

Fonte: dados da pesquisa.

Retirar nove berlindes, que é a totalidade dos existentes no saco, obviamente garante a extração de um berlinde de cada uma das cores existentes (Figura 14).

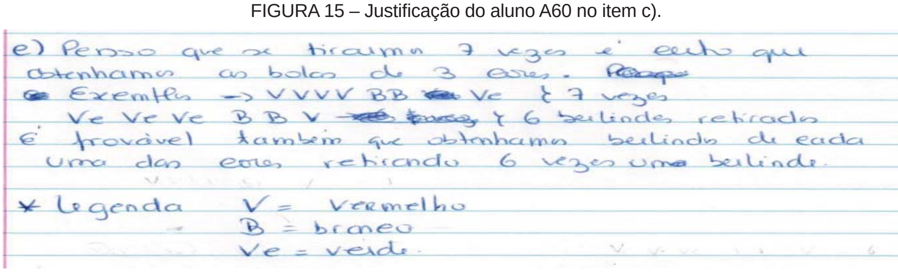
FIGURA 14 – Justificação do aluno A31 no item c).


c) Devemo retirar 9 berlindes, porque são apenas 9 berlindes existentes, se retirarmos 9 temos a certeza que todas as cores vão sair.

Fonte: dados da pesquisa.

No caso da resposta retirar sete berlindes, os alunos consideraram o número total de berlindes vermelhos e brancos, seguindo-se a extração do berlinde verde (Figura 15).

FIGURA 15 – Justificação do aluno A60 no item c).


c) Penso que se tiramos 7 vezes é certo que obtenhamos as bolas de 3 cores.
Exemplo → V V V V B B Ve } 7 vezes
Ve Ve Ve B B V } 6 berlindes retirados
É provável também que obtenhamos berlindes de cada uma das cores retirando 6 vezes uma berlinde.
* Legenda V = vermelho
B = branco
Ve = verde

Fonte: dados da pesquisa.

Este aluno apresentou ainda como resposta retirar seis berlindes, considerando, agora, o número total de berlindes verdes e brancos, seguindo-se a obtenção de um berlinde de cor vermelha na próxima extração.

Finalmente, o aluno que indicou a resposta retirar cinco berlindes apresentou uma justificação ininteligível.

Na Tabela 2 apresenta-se um resumo das estratégias empregadas pelos alunos na resolução da tarefa. Os alunos responderam corretamente utilizando unicamente estratégias do tipo E1 (fixar-se unicamente na quantidade de berlindes extraídos) e E2 (fixar-se unicamente na quantidade de berlindes que ficam no saco depois da extração), sendo a estratégia E1 a que mais êxito produziu. Este é o caso do item a), em que todos os alunos que responderam corretamente (84,1%) utilizaram a estratégia E1.

TABELA 2 – Frequência (em %) de alunos segundo a estratégia utilizada em cada um dos três itens.

Estratégias utilizadas		**Itens**		
		a)	**b)**	**c)**
E1	Correta	84,1	38,1	33,3
	Parcialmente correta	–	17,4	6,3
E2	Correta	–	20,6	1,6
	Incorreta: Equiprobabilidade	–	14,3	42,9
Outras		12,7	–	7,9
Não justifica		–	4,8	4,7
Não responde		3,2	4,8	3,2

Fonte: dados da pesquisa.

No caso do item b), tanto a estratégia E1 (38,1% dos alunos) como a estratégia E2 (20,6% dos alunos) conduziram a percentagens de respostas corretas mais próximas. Apesar disso, o uso da estratégia E2 levou a mais erros na resposta que a E1 já que 17,4% dos alunos planificam corretamente a resolução do problema (aplicando a estratégia E1) mas sem atenderem à necessidade de ordenar por ordem decrescente a quantidade de berlindes das diferentes cores existentes no saco (4 berlindes vermelhos, 3 berlindes verdes e finalmente 2 berlindes brancos para garantir a extração segura de 2 berlindes de cor verde e vermelha). Donde, podemos dizer que os alunos respondem de modo parcialmente correto ao item pois o processo de resolução da tarefa está bem justificado. Não podemos dizer o mesmo dos alunos (14,3%) que utilizam a estratégia E2 e cometem o erro de manter equivalentes as razões de berlindes de cada cor no total de berlindes (ver Figura 7).

A ideia de manter a equiprobabilidade dos acontecimentos: “obter berlinde branco”, “obter berlinde vermelho” e “obter berlinde verde” torna-se mais acentuada na resolução do item c), onde muitos alunos aplicam incorretamente a estratégia E2 (42,9%) mantendo fixa no saco a quantidade de 2 vermelhos, 2 verdes e 2 brancos (ver Figura 13) ou 1 vermelho, 1 verde e 1 branco.

CONCLUSÃO E DISCUSSÃO

Em termos de resultados, verificou-se que o desempenho dos alunos diminuiu sistematicamente com a garantia de extrair pelo menos um berlinde de uma cor, dois berlindes de duas cores e um berlinde de cada uma das três cores consideradas, tendo a maioria dos alunos respondido corretamente nos dois primeiros casos e, nos três itens, obteve-se um valor da média de 60,3%.

No caso do item c), que se revelou ser o mais difícil para os futuros educadores e professores dos primeiros anos escolares, ele (ou um item muito semelhante) foi também estudado em outros estudos prévios envolvendo professores do Ensino Básico, tendo-se observado percentagens de respostas corretas não muito díspares dos 38,1% que se obteve no presente estudo: 24,4% no estudo de Fernandes e Barros (2005) e 46,3% no estudo de Ortiz e Mohamend (2014). A maior discrepância observada no estudo de Fernandes e Barros, como foi antes referido, poderá dever-se ao facto de estar envolvido um maior número de berlindes (11 berlindes no total: 5 vermelhos, 2 verdes e 4 brancos).

Além disso, as percentagens de respostas corretas obtidas no presente estudo, especialmente nos itens b) e c), são inferiores às observadas em outros estudos, quer na classificação quer na formulação de acontecimentos. Fernandes e Barros (2005), envolvendo futuros professores dos primeiros anos, na globalidade dos itens, obtiveram um valor da média das percentagens de respostas corretas superior quer na classificação de acontecimentos (91,4%), quer na formulação de acontecimentos (90,1%). Esta tendência foi também observada em estudos envolvendo outros alunos, especificamente Fischbein, Nello e Marino (1991), envolvendo alunos de dois grupos: grupo 1 (4.º ano e 5.º ano) e grupo 2 (6.º ano, 7.º ano e 8.º ano), na classificação de acontecimentos, obtiveram médias das percentagens de respostas corretas, na globalidade dos itens, de 77,1% no grupo 1, e 85,3% no grupo 2. Finalmente, Fernandes (1999), envolvendo alunos do 8.º ano e 11.º ano, na classificação de acontecimentos, obteve médias das percentagens de respostas corretas, na globalidade dos itens, de 78,0% no 8.º ano e 86,4% no 11.º ano. Uma hipótese explicativa para as menores dificuldades sentidas pelos alunos na classificação e formulação de acontecimentos pode residir no facto dessas tarefas poderem ser respondidas através da identificação dos casos favoráveis no espaço amostral, enquanto o mesmo não acontece no presente estudo.

O aumento das dificuldades dos alunos com o aumento do número de cores dos berlindes envolvidos explica-se a seguir. Para garantir a obtenção de pelo menos um berlinde de uma cor, os alunos centraram-se no total de berlindes das outras cores, o que conduzia à seleção da resposta correta, utilizando todos eles a estratégia E1 (fixando-se nos berlindes extraídos do saco). Para garantir a obtenção de pelo menos dois berlindes de cada uma de duas cores distintas (vermelho e verde), os alunos centraram-se no total de berlindes da cor não pretendida e de uma das cores pretendidas, o que conduzia à resposta correta ou errada consoante se escolhia uma ou outra das cores pretendidas. Neste caso, a estratégia que conduziu a mais respostas corretas foi a E1, apesar de que uma grande percentagem de alunos descuidaram a ordenação da quantidade de berlindes das cores envolvidas e, portanto, falharam na sua resposta, respondendo 6 berlindes em vez de 7.

Finalmente, para garantir a obtenção de pelo menos um berlinde de cada uma das três cores, os alunos consideraram o total de berlindes de duas das cores, o que conduzia à resposta correta ou errada consoante as cores consideradas. Quer no caso dos dois berlindes de cores distintas, quer no caso dos três berlindes de cores distintas, a obtenção da resposta correta requer que se considere o número total de berlindes da cor ou cores pretendidas por ordem decrescente, começando pela cor mais numerosa e continuando com a que se segue ou seguem na ordenação. Ora, é a não consideração sistemática deste requisito que explica o aumento das dificuldades dos alunos quando se passa da garantia de extrair pelo menos um berlinde de uma cor para dois berlindes de cores distintas e, finalmente, para três berlindes de cores distintas.

Adicionalmente, alguns alunos justificaram o número de berlindes a extrair com base na obtenção de certos valores de probabilidade das cores envolvidas, incluindo a equiprobabilidade de todas as cores, que eles avaliaram subjetivamente como sendo suficientemente elevados para garantir a obtenção da cor ou cores pretendidas. Os alunos confiam que a igualdade do número de berlindes garante a obtenção de um berlinde de cada cor, o qual foi um raciocínio muito adotado no presente estudo.

Podemos pensar que as situações de ensino com que os alunos se confrontam na sua formação académica estão muito ligadas ao cálculo algorítmico de probabilidades e em que se descuida o contexto e a compreensão da própria experiência aleatória. Neste sentido, não se pede ao aluno para classificar ou formular acontecimentos ou aprofundar a sua compreensão da experiência aleatória e, em vez disso, limitam-se as questões ao cálculo matemático de probabilidades com a intenção de obter resultados, na sua maioria descontextualizados. Este efeito pode ser observado no presente estudo pois para garantir a obtenção de um acontecimento certo requer-se a verificação de todos os casos, implicando uma análise exaustiva que não é necessária no caso dos acontecimentos possíveis (mas não certos).

Em termos da formação em probabilidades, os resultados deste estudo apontam para necessidade dos futuros educadores e professores dos primeiros anos escolares aprofundarem a compreensão concetual da probabilidade. Os professores necessitam de ser expostos a situações em que façam uso do raciocínio probabilístico no contexto da experiência aleatória e em diferentes ambientes, nos quais os acontecimentos não tenham de ser sempre equiprováveis. A equiprobabilidade não é sempre fácil de reconhecer na realidade (LECOUTRE; DURANT, 1988) e este facto não parece encontrar-se nas tarefas de formação dos nossos alunos. Consideramos que a capacidade de sintetizar a informação disponível numa situação e valorizar conjuntamente informação de diversa índole que intervenha numa experiência aleatória são aspetos da formação dos nossos alunos que devem se trabalhados desde a realidade e potenciados na sala de aula.

AGRADECIMENTOS

Investigação financiada por fundos nacionais, através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia, no âmbito dos projectos PEst-OE/CED/UI1661/2014 do CIEd-

UM, pelo projeto EDU2013-41141-P (MEC, Espanha) e pelo grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

REFERÊNCIAS

BATANERO, C. La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿qué podemos aprender de la investigación? In: FERNANDES, J. A.; VISEU, F.; MARTINHO, M. H. ; CORREIA, P. F. (Eds.). *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho, 2013, p.9-21.

BATANERO, C.; DÍAZ, C. Meaning and understanding of mathematics. The case of probability. In: VAN BENDEGEN, J. P.; FRANÇOIS, K. (Eds.). *Philosophical dimensions in mathematics education*. New York: Springer, 2007, p.107-127.

BOROVCNIK, M.; BENTZ, H.-J.; KAPADIA, R. A probabilistic perspective. In: KAPADIA, R.; BOROVCNIK, M. (Eds.). *Chance encounters: probability in education*. Dordrecht: Kluwer, 1991, p.27-71.

CAÑIZARES, M. J. *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilisticas primarias*. Tese de doutoramento, Universidade do Granada, España, 1997.

FERNANDES, J. A. *Concepções erradas na aprendizagem de conceitos probabilísticos*. Dissertação de mestrado não publicada, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 1990.

______. *Intuições e aprendizagem de probabilidades: uma proposta de ensino de probabilidades no 9.º ano de escolaridade*. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga, Portugal, 1999.

______. Intuições probabilísticas em alunos do 8.º e 11.º anos de escolaridade. *Quadrante*, 10(2), p.3-32, 2001.

FERNANDES, J. A.; BARROS, P. M. Dificuldades de futuros professores do 1.º e 2.º ciclos em estocástica. In: Actas do *V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (CIBEM), Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 17-22 jul. 2005.

FISCHBEIN, E. *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1975.

FISCHBEIN, E.; GAZIT, A. Does the teaching of probability improve probabilistic intuitions? *Educational Studies in Mathematics, 15* (1), p.1-24, 1984.

FISCHBEIN, E.; NELLO, M. S.; MARINO, M. S. Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549, 1991.

KONOLD, C.; POLLATSEK, A.; WELL, A.; LOHMEIER, J.; LIPSON, A. Inconsistencies in students' reasoning about probability. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(5), p.392-414, 1993.

LECOUTRE, M.-P.; DURANT, J-L. Jugements probabilistes et modèles cognitifs: étude d'une situation aléatoire. *Educational Studies in Mathematics*, 19, p.357-368, 1988.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor, 2007.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA. *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Autor, 2013.

______. *Programa de Matemática A – Ensino Secundário*. Lisboa: Autor, 2014.

ORTIZ, J. J.; MOHAMEND, N. Conocimiento de futuros profesores sobre espacio muestral. *Quadrante*, v.XXIII, n.2, p.5-22, 2014.